ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Φεβρουάριος 2017

<u>**ΠΡΟΣΟΧΗ:**</u> Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

<u>**Θέμα**</u> **1** : Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^4 - 8x + \cos x = 0$. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ υπάρχει μια μοναδική ρίζα x^* της εξίσωσης αυτής. Για την εύρεση της ρίζας αυτής προτείνεται ο αλγόριθμος

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}(x_n^4 + \cos x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Να αποδείξετε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στη ρίζα x^* για κάθε x_0 που βρίσκεται στο διάστημα $I = [0,1]$.

<u>**Θέμα**</u> **2** : Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

χρησιμοποιώντας την LU παραγοντοποίηση του A. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις διατηρώντας κλάσματα στους υπολογισμούς.)

<u>***Θέμα***</u> ***3*** *: Δίνεται η συνάρτηση f από τον πίνακα τιμών*

x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	0	-3	-3	0

και είναι γνωστό ότι

$$\max_{-2\le x\le 2} \left|f^{(4)}(x)\right| = 24.$$

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα παραπάνω σημεία, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Νεύτωνα με διαιρεμένες διαφορές, καθώς και φραγμα για το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στο διάστημα $[-2,2]$.

<u>**Θέμα**</u> **4** : Να βρεθούν τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ώστε ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$Q(f) = \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1) + \alpha_3 f'(1), \quad f \in C^1[0,1],$$

να είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^1 f(x)dx$. Για πολυώνυμα μέχρι ποιού βαθμού θα είναι ακριβής ο τύπος αυτός;

Φεβρουάριος 2017

Θέμα 1ο

Δίνεται η εξίσωση $f(x)=x^4-8x+\cos x=0$. ΝΔΟ στο διάστημα $[0,1]$ $\exists$ μία μοναδική ρίζα x^* της εξίσωσης αυτής. Για την εύρεση της ρίζας αυτής προτείνεται ο αλγόριθμος $x_{n+1}=\frac{1}{8}(x_n^4+\cos x_n)$, $n=0,1,2,\dots$ Να αποδείξετε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στη ρίζα x^* για που βρίσκεται στο διάστημα $I=[0,1]$

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=0^4-8\cdot 0+\cos 0=1>0\\ f(1)&=1^4-8\cdot 1+\cos 1\simeq-6<0\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{Bol}}\exists\,\xi\in(0,1)\text{ που } f(\xi)=0$$

Θέτω $\varphi(x)=\frac{1}{8}(x^4+\cos x)$

μπαίνουν ως ελάχιστες τιμές   μπαίνουν ως μέγιστες τιμές

$\varphi(x)\geq\frac{1}{8}(0+\cos 1)>0$, $\varphi(x)\leq\frac{1}{8}(1+\cos 0)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

Άρα $\varphi([0,1])\subset[0,1]$ καλώς ορισμένη

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{1}{8}(4x^3-\sin x)\leq\frac{1}{8}(4-0)=\frac{1}{2}\\ \varphi'(x)&\geq\frac{1}{8}(0-\sin 1)=-\frac{\sin 1}{8}>-\frac{1}{8}\end{aligned}\right\}\Rightarrow|\varphi'(x)|\leq\frac{1}{2}<1\text{, συστολή}$$

Άρα συγκλίνει

Θέμα 2ο

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ χρησιμοποιώντας την LU παραγοντοποίηση

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & 1\\ \times 1 & 1 & 1 & 0\\ \times 1 & 1 & 1 & 1\end{array}$$

$-(1\cdot 1)+1=0$ | $-(1\cdot 1)+1=0$

$-1(-1)+1=2$ | $-(1(-1))+1=2$

$-(1\cdot 1)+0=-1$ | $-(1\cdot 1)+1=0$

Άρα $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&2&0\end{pmatrix}$

$-(1\cdot 0)+0=0$

$-(1\cdot 2)+2=0$

$-(1(-1))+0=1$

Άρα $U=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ πού Α

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$LX = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_{11} + 0x_{21} + 0x_{31} = 1 \Rightarrow x_{11} = 1$

$x_{12} + 0x_{22} + 0x_{32} = 0 \Rightarrow x_{12} = 0$

$x_{13} + 0x_{23} + 0x_{33} = 0 \Rightarrow x_{13} = 0$

$x_{11} + x_{21} = 0 \Rightarrow x_{21} = -1$

$x_{12} + x_{22} = 1 \Rightarrow x_{22} = 1$

$x_{13} + x_{23} = 0 \Rightarrow x_{23} = 0$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 0 \Rightarrow 1 + x_{21} + x_{31} = 0 \Rightarrow 1 - 1 + x_{31} = 0 \Rightarrow x_{31} = 0$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 0 \Rightarrow x_{22} + x_{32} = 0 \Rightarrow 1 + x_{32} = 0 \Rightarrow x_{32} = -1$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \Rightarrow x_{23} + x_{33} = 1 \Rightarrow x_{33} = 1$

Άρα $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$UY = X$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$y_{11} - y_{21} + y_{31} = 1 \Rightarrow y_{11} = 1/2$ $\qquad 2y_{21} - y_{31} = -1 \Rightarrow 2y_{21} = -1 \Rightarrow y_{21} = -1/2$

$y_{12} - y_{22} + y_{32} = 0 \Rightarrow y_{12} = 1$ $\qquad 2y_{22} - y_{32} = 1 \Rightarrow 2y_{22} + 1 = 1 \Rightarrow y_{22} = 0$

$y_{13} - y_{23} + y_{33} = 0 \Rightarrow y_{13} = -\frac{1}{2}$ $\qquad 2y_{23} - y_{33} = 0 \Rightarrow 2y_{23} - 1 = 0 \Rightarrow y_{23} = 1/2$

$y_{31} = 0$

$y_{32} = -1$

$y_{33} = 1$

Άρα $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Θέμα 3º

Δίνεται η συνάρτηση f από τον πίνακα τιμών:

x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	0	-3	-3	0

και είναι γνωστό ότι $\max_{-2\le x\le 2} |f^{4}(x)| = 24$

Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα παραπάνω σημεία, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Νεύτωνα με διαιρεμένες διαφορές καθώς και φράγμα για το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στο διάστημα [-2,2]

x_i	$\Delta^0(x_i)(f)$	$\Delta^{(1)}(x_i,x_{i+1})(f)$	$\Delta^{(2)}(x_i,x_{i+1},x_{i+2})(f)$	$\Delta^{(3)}(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})(f)$
-2	0	-3		
-1	-3		1	
1	-3	0		0
2	0	3	1	

$\frac{-3-0}{-1-(-2)} = \frac{-3}{-1+2} = -3$

$\frac{-3-(-3)}{1-(-1)} = 0$

$\frac{0-(-3)}{2-1} = 3$

$\frac{0-(-3)}{1-(-2)} = 1$

$\frac{3-0}{2-(-1)} = 1$

$\frac{1-1}{2-(-2)} = 0$

$P(x) = f(x_0) + (x-x_0)\Delta^{(1)}(x_0,x_1)(f) + (x-x_0)(x-x_1)\Delta^{(2)}(x_0,x_1,x_2)(f) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta^{(3)}(x_0,x_1,x_2,x_3)(f) =$

$0 + (x+2)(-3) + (x+2)(x+1)\cdot 1 + (x+2)(x+1)(x-1)\cdot 0 =$

$-3x-6+x^2+x+2x+2+(x+2)(x^2-1)\cdot 0 =$

$-3x-6+x^2+3x+2 = x^2-4$

$$R_2(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\varphi(x)$$

$$\varphi(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$\|e\| = \|R_2\| = \max_{-2\le x\le 2}\left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\varphi(x)\right| \le \max_{-2\le x\le 2}\frac{f^{(4)}(x)}{4!}\max_{-2\le x\le 2}|\varphi(x)|$$

$$\max_{-2\le x\le 2}|\varphi(x)|$$

$$\varphi'(x) = 4x^3 - 10x = x(4x^2-10) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$\varphi(0) = 4,\ \varphi\left(\pm\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = \frac{16-25}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$\left|\varphi\left(\pm\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)\right| = \frac{9}{4} < 4 \quad \|e\| \le 4$$

Θεμα 4ο

Να βρεθουν τα a_1, a_2, a_3, ώστε ο τυπος αριθμητικής ολοκλήρωσης $Q(f) = a_1 f(0) + a_2 f(1) + a_3 f'(1)$, $f \in C^1[0,1]$ να είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^1 f(x)dx$. Για πολυώνυμα μέχρι ποιού βαθμού θα είναι ο τύπος ακριβής;

$$Q(f) = a_1 f(0) + a_2 f(1) + a_3 f'(1), \quad I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

$$\left.\begin{aligned} &f(x) = 1 \quad I(f) = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1 \\ &Q(f) = a_1\cdot 1 + a_2\cdot 1 + a_3\cdot 0 = a_1 + a_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 + a_2 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &f(x) = x : I(f) = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\ &Q(f) = a_1 0 + a_2\cdot 1 + a_3\cdot 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_2 + a_3 = \frac{1}{2}$$

$f(x) = x^2$: $I(f) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$ $\Bigg\}$ $a_2 + 2a_3 = \frac{1}{3}$

$Q(f) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 2$

Άρα $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = -\frac{1}{6}$

$f(x) = x^3$: $I(f) = \frac{1}{4}$

$Q(f) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}$

Άρα μέχρι 2ου βαθμού.